

2. INTEGRAL MÚLTIPLE DE RIEMANN

2.1. La integral de Riemann sobre rectángulos en \mathbb{R}^n

Rectángulos en \mathbb{R}^n

En \mathbb{R}^n , se llama **rectángulo** a cualquier conjunto R compacto (cerrado y acotado) de la forma:

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] = , \quad \text{con } -\infty < a_i < b_i < +\infty \text{ para todo } i$$

es decir, al producto cartesiano de n intervalos lineales compactos (cerrados y acotados). Se llama **volumen del rectángulo** R a:

$$V(R) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

y **diámetro del rectángulo** R a:

$$d(R) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2} = \left(\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 \right)^{1/2}$$

Cuando los intervalos que determinan el rectángulo son abiertos y acotados, el rectángulo se llama **rectángulo abierto**, siendo su volumen y diámetro el mismo del rectángulo cerrado correspondiente.

Partición de un rectángulo

Se llama **partición** del rectángulo $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ al producto de n particiones, cada una de uno de los intervalos que lo determinan, en el siguiente sentido: si $P_i = (a_i = x_0^i < x_1^i < x_2^i < \dots < x_{m_i}^i = b_i) \in \mathcal{P}([a_i, b_i])$ es una partición del intervalo $[a_i, b_i]$, $1 \leq i \leq n$, entonces una partición del rectángulo R es:

$$P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n = \\ = \{R_{i_1 i_2 \dots i_n} = [x_{i_1-1}^1, x_{i_1}^1] \times [x_{i_2-1}^2, x_{i_2}^2] \times \dots \times [x_{i_n-1}^n, x_{i_n}^n] : 1 \leq i_j \leq m_j, 1 \leq j \leq n\}$$

El conjunto de todas las particiones de un rectángulo R se representa por $\mathcal{P}(R)$. Si P_i consta de m_i subintervalos, $1 \leq i \leq n$, la partición $P \in \mathcal{P}(R)$ consta de $m_1 m_2 \dots m_n$ subrectángulos de interior disjunto contenidos en R , y se llama **diámetro de la partición** P al mayor de los diámetros de los subrectángulos:

$$\delta(P) = \max \{d(R_{i_1 i_2 \dots i_n}) : 1 \leq i_j \leq m_j, 1 \leq j \leq n\}$$

Dadas dos particiones del mismo rectángulo, $P, P' \in \mathcal{P}(R)$, se dice que P' es **más fina** que P si cada subrectángulo de P' está contenido en algún subrectángulo de P . Obviamente, si P' es más fina que P su diámetro es menor o igual: $\delta(P') \leq \delta(P)$.

Sumas de Riemann

Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo, $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y $P \in \mathcal{P}(R)$ una partición del rectángulo R . Puesto que f es acotada, sobre cada subrectángulo $S \in P$ se pueden considerar el ínfimo y el supremo:

$$\text{Para todo } S \in P: \begin{cases} m_S = \inf \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in S\} = \inf_S f \\ M_S = \sup \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in S\} = \sup_S f \end{cases}$$

Se llaman **suma inferior y suma superior de Riemann**, respectivamente, de la función f asociadas a la partición P , a las expresiones siguientes:

$$s(f, P) = \sum_{S \in P} m_S V(S) \qquad S(f, P) = \sum_{S \in P} M_S V(S)$$

Propiedades

Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo y $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Se verifican las siguientes propiedades:

1. Para cualquier partición $P \in \mathcal{P}(R)$: $s(f, P) \leq S(f, P)$.
2. Si $P, P' \in \mathcal{P}(R)$ y P' es más fina que P , entonces:

$$s(f, P) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P)$$

3. Si $P, Q \in \mathcal{P}(R)$ son particiones arbitrarias: $s(f, P) \leq S(f, Q)$.
4. Si m y M son, respectivamente, el ínfimo y el supremo de f en R , para cualquier partición $P \in \mathcal{P}(R)$ se cumple que:

$$mV(R) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq MV(R)$$

Integral múltiple de Riemann

Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo y $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Se definen las **integrales inferior y superior de Riemann** de f sobre R como:

$$\begin{aligned} \int_{*R} f &= \int_{*R} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \iint \dots \int_{*R} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \sup \{s(f, P) : P \in \mathcal{P}(R)\} \\ \int_R^* f &= \int_R^* f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \iint \dots \int_R^* f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \inf \{S(f, P) : P \in \mathcal{P}(R)\} \end{aligned}$$

Es fácil comprobar, de las propiedades anteriores, que $\int_{*R} f \leq \int_R^* f$, y cuando ambas coinciden se dice que f es **integrable Riemann** sobre el rectángulo R , definiéndose la **integral de Riemann** como el valor común, que se representa por

$$\int_R f = \int_R f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \iint \dots \int_R f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Si no coinciden las integrales inferior y superior de Riemann, se dice que f no es integrable Riemann sobre R . El conjunto de todas las funciones integrables Riemann sobre el rectángulo R se representa por:

$$\mathcal{R}(R) = \{f : R \rightarrow \mathbb{R} \text{ acotada} : f \text{ es integrable Riemann sobre } R\}$$

Observación: Si $R \subset \mathbb{R}^n$ es un rectángulo, $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, y $\{P_m\} \subset \mathcal{P}(R)$ una sucesión de particiones tales que $\delta(P_m) \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, entonces:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s(f, P_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} S(f, P_m) = I \implies f \in \mathcal{R}(R) \text{ y } \int_R f = I$$

Ejemplos

1. Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo, y $f(\mathbf{x}) = k$ para todo $\mathbf{x} \in R$. Prueba que: $\int_R f = kV(R)$.
2. Sea $R = [0, 1] \times \dots \times [0, 1] = [0, 1]^n$ el cubo unidad y $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x_1 \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \text{ si } x_1 \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.
Prueba que f no es integrable Riemann sobre R .
3. Calcula, si existe, la integral de $f(x, y) = x + y$ sobre el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

Ejercicios

1. Calcula la integral de $f(x) = x^2$ sobre el intervalo $[0, 1]$.
2. Estudia si existe la integral sobre $[0, 1]$ de la función $f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.
3. Calcula la integral sobre $R = [0, 1] \times [0, 1]$ de la función $f(x, y) = xy$.

Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

1. $\frac{1}{3}$.
2. No es integrable. Las integrales inferior y superior son, respectivamente, 0 y 1.
3. $\frac{1}{4}$.